Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Lars Poppe
Dr. Andreas Vollmer

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 24 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(2+1+2 Punkte)*

(a) Zeige, dass die Funktion $f(x) = 1/x$ nicht gleichmäßig stetig auf $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist.

(b) Zeige, dass die Exponentialfunktion nicht gleichmäßig stetig auf $[1, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist.

(c) Zeige, dass die Exponentialfunktion gleichmäßig stetig auf $(-\infty, 1] \subset \mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Benutze uneigentliche Grenzwerte. Betrachte für (a) und (b) Punkte x, y festen Abstandes $|x - y| = \delta/2$, um einen Widerspruch herzuleiten, und konstruiere für (c) ein passendes $\delta > 0$ mit Hilfe des Grenzwertes für $x \to -\infty$ und beschränkter Intervalle.

Lösung. (a): Angenommen, f wäre gleichmäßig stetig auf $(0, 1]$. Dann existiert für z.B. $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < 1$$

für alle $x, y \in (0, 1]$. Außerdem gilt

$$1 > \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x - y|}{xy} \geq \frac{|x - y|}{x}$$

wegen $0 < y \leq 1$. Für einen festen Abstand $|x - y| = \delta/2 < \delta$ (bzw. $y = x + \delta/2$) ist somit

$$1 > \frac{\delta}{2x} \qquad \text{für alle } x \in (0, 1],$$

was wegen $1/x \longrightarrow \infty$ für $x \to 0$ einen Widerspruch darstellt.

(b): Wir gehen wie in Aufgabenteil (a) für einen Widerspruch vor und finden

$$|\exp(y) - \exp(x)| = \exp(x)\,|\exp(y - x) - 1|$$

aufgrund der Funktionalgleichung für exp und folgern für die Wahl $y = x + \delta/2$, dass

$$1 > |\exp(y) - \exp(x)| = \exp(x)\,|\exp(\delta/2) - 1|\,,$$

was insbesondere für alle hinreichend großen $x \geq 1$ wegen $\exp(x) \longrightarrow \infty$ für $x \to \infty$ und $|\exp(\delta/2) - 1| > 0$ nicht möglich ist.

(c): Fixiere $\varepsilon > 0$. Wegen $\exp(x) \longrightarrow 0$ für $x \to -\infty$ existiert dann ein $R > 0$ mit

$$|\exp(x) - 0| < \varepsilon/2 \qquad \text{für } x \in (-\infty, -R].$$

Also ist insbesondere

$$|\exp(x) - \exp(y)| \leq |\exp(x)| + |\exp(y)| < \varepsilon \qquad \text{für } x, y \in (-\infty, -R]$$

Da exp weiterhin stetig auf $\mathbb{R}$ ist, ist exp insbesondere gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $[-(R+1), 1]$ und es existiert $\delta^* > 0$ mit

$$|\exp(x) - \exp(y)| < \varepsilon \qquad \text{für } x, y \in [-(R+1), 1] \text{ mit } |x - y| < \delta^*.$$

Setzen wir nun $\delta := \min\{\delta^*, 1\} > 0$, ist sichergestellt, dass für alle $x, y \in (-\infty, 1]$ einer der beiden Fälle eintritt und es folgt

$$|\exp(x) - \exp(y)| < \varepsilon \qquad \text{für } x, y \in (-\infty, 1] \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

■

Aufgabe 2: *(5 Punkte)* Sei $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Beweise, dass f genau dann gleichmäßig stetig auf $(0, 1]$ ist, falls der einseitige Grenzwert $\lim_{x \searrow 0} f(x)$ als reelle Zahl existiert.

Hinweis: Zeige zunächst für die erste Richtung, dass eine gleichmäßig stetige Funktion auf $(0, 1]$ beschränkt ist. Konstruiere damit einen Kandidaten für den Grenzwert.

Lösung. Existiere zuerst $\lim_{x \searrow 0} f(x)$ als reelle Zahl. Dann kann f zu einer stetigen Funktion auf $[0, 1]$ durch diesen Grenzwert fortgesetzt werden und ist dort gleichmäßig stetig. Insbesondere ist f also auch auf $(0, 1]$ gleichmäßig stetig.

Umgekehrt sei f nun gleichmäßig stetig auf $(0, 1]$ und wir zeigen, dass f beschränkt ist. Für zum Beispiel $\varepsilon = 1$ existiert $\delta \equiv \delta(1) > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < 1 \qquad \text{für alle } x, y \in (0, 1] \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Also ist mit $y = \delta/2$ und der umgekehrten Dreieckungsungleichung insbesondere

$$|f(x)| < 1 + |f(\delta/2)| \qquad \text{für alle } x \in (0, \delta/2].$$

Auf dem kompakten Intervall $[\delta/2, 1] \subset (0, 1]$ ist $|f|$ aber stetig und nimmt daher ein Maximum an, was bedeutet, dass f auf $(0, 1]$ beschränkt ist.

Nun wählen wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1]$ mit $x_n \longrightarrow 0$ für $x \to 0$ und erhalten, dass auch die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{R}$ ist. Nach Bolzano-Weierstraß existiert daher eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $f_0 \in \mathbb{R}$, sodass $f(x_{n_k}) \longrightarrow f_0$ für $k \to \infty$.

Wenn wir nun zeigen, dass für jede Folge $y_n \longrightarrow 0$ aus $(0, 1]$ gilt, dass $f(y_n) \longrightarrow f_0$, dann existiert der halbseitige Grenzwert und wir sind fertig. Sei also $\varepsilon > 0$, dann finden wir zuerst ein $\delta \equiv \delta(\varepsilon/2) > 0$ aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f. Außerdem ist

$$|f(y_n) - f_0| \leq |f(y_n) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f_0|$$

nach der Dreiecksungleichung. Da $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen sind, gilt $|y_n - x_{n_k}| < \delta$ für alle hinreichend großen $n, k \in \mathbb{N}$ sowie $|f(x_{n_k}) - f_0| \longrightarrow 0$ für $k \to \infty$ und damit

$$|f(y_n) - f(x_{n_k})| < \varepsilon/2, \quad |f(x_{n_k}) - f_0| < \varepsilon/2 \qquad \text{für } k, n \in \mathbb{N} \text{ hinreichend groß.}$$

Also folgt auch

$$|f(y_n) - f_0| < \varepsilon \qquad \text{für alle hinreichend großen } n \in \mathbb{N},$$

d.h es gilt $f(y_n) \longrightarrow f_0$. ■